Classification thématique de MÉGAMATHS
megamaths.fr / © 2022 DJM / user220209
Rubrique : séries de fonctions

Convergence de la série de fonctions $\sum \sin \frac{x}{n^2}$

Voici un exercice de licence 2e année qui permet de revenir sur la convergence d'une série de fonctions et réviser un peu ce thème. Bon exercice pour les prépa agrégation, ou juste pour le fun.

QUESTION

On considère la série de fonctions sur $\mathbb{R}$: $\sum_{n \geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$

Etudier a) la convergence simple

b) la convergence uniforme sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

c) la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

(tiré. examen DaugA 2-année, Analyse, juin 79 à Nice)

On considère la série de fonctions sur $\mathbb{R}$: $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$

Etudier a) la convergence simple

b) la convergence uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

c) la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

(tiré. examen DaugA 2-année, Analyse, juin 79 à Nice)

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\sin \frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ et la convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{|x|}{n^2}$ assurent la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $x \in [a,b]$ et si $M = \operatorname{Sup}(|a|,|b|)$, $\left|\sin \frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$ pour tout montre la convergence normale (et donc uniforme) de $\sum \sin \frac{x}{n^2}$ sur $[a,b]$.

c) $\operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2} - \sum_{n=0}^{N} \sin \frac{x}{n^2} \right| = \operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2} \right| \geq 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, puisqu'il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{2}(N+1)^2$ pour avoir $\sin \frac{x}{(N+1)^2} = 1$ et $\sin \frac{x}{n^2} = \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{N+1}{n}\right)^2 \geq 0$ pour tout $n > N+1$.

Ainsi $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ en entier.